Dva zadatka iz primjene diferencijalnog računa

Matematika I, EA, ETF

Zimski semestar 2011/12

1. Zadatak U dati kružni isječak (poluprečnika r) sa centralnim uglom $\alpha < \frac{\pi}{2}$ upisati pravougaonik maksimalne površine tako da jedna stranica pravougaonika leži na poluprečniku koji ograničava dati isječak, a jedno tjeme na luku datog isječka.

Rješenje:

Pravougaonik čija osnovica leži na poluprečniku, a jedno tjeme na luku datog kružnog isječka je u potpunosti odredjen tjemenom na luku: svakom takvom pravougaoniku odgovara jedna tačka na luku, i svakoj tački odgovara tačno jedan pravougaonik. Dakle, problem izbora pravougaonika $ABCD$ najveće površine se svodi na problem izbora tačke C na luku datog isječka.

S druge strane, svaka tačka C na luku je jedinstveno odredjena centralnim uglom φ: svaka tačka na luku odredjuje jedan centralni ugao, a svaki centralni ugao odredjuje jednu tačku. Stoga, problem izbora tačke C koja daje pravougaonik najvéce površine možemo svesti na problem izbora ugla centralnog ugla φ koji daje tačku C.

Znamo da je površina proizvoljnog pravougaonika $ABCD$ data sa: $P =$

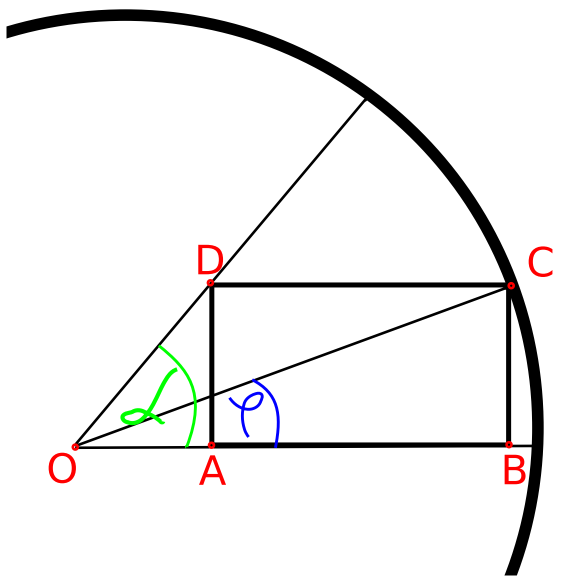

Figure 1: Slika uz zadatak 1.

$AB \cdot AD$. U ovom konkretnom slučaju površinu pravougaonika ćemo predstaviti kao funkciju centralnog ugla φ tako što ćemo i stranicu AB i stranicu AD izraziti preko φ. Zatim ćemo, koristeći diferencijalni račun, odrediti vrijednost centralnog ugla za koju je površina najveća, a samim tim će biti odredjen i pravougaonik najveće porvršine.

Sada ćemo stranice AB i AD izraziti preko centralnog ugla φ. Prije nego se upustimo u izračunavanja podsjetimo se da su nam po formulaciji zadatka poznati poluprečnik r i centralni ugao $\alpha < \frac{\pi}{2}$ i primijetimo da je $OC = r$. (Vidjeti sliku uz zadatak).

Iz trougla $\triangle OBC$ imamo da je

$$\sin\varphi = \frac{BC}{OC} = \frac{BC}{r}, \qquad \cos\varphi = \frac{OB}{OC} = \frac{OB}{r},$$

odakle zaključujemo:

$$BC = r\sin\varphi, \qquad OB = r\cos\varphi. \tag{1}$$

Primijetimo dalje da je

$$AB = OB - OA.$$

Iz trougla $\triangle OAD$ imamo da je

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OA}{AD} = \frac{OA}{BC}.$$

Otuda je

$$OA = BC \cdot \operatorname{ctg}\alpha,$$

pa, zbog (1), važi

$$OA = r\sin\varphi \operatorname{ctg}\alpha.$$

Otuda, koristeći ponovo (1) i jednakost $AB = OB - OA$ dobijamo da važi:

$$AB = r\cos\varphi - r\sin\varphi \operatorname{ctg}\alpha \tag{2}$$

Sada konačno množenjem izraza za AB i BC površinu pravouganika $ABCD$ možemo pisati kao funkciju ugla φ, gdje je $0 < \varphi < 0$, sa sljedeći način:

$$P(\varphi) = AB \cdot CD = (r\cos\varphi - r\sin\varphi \operatorname{ctg}\alpha) \cdot r\sin\varphi,$$

odnosno:

$$P(\varphi) = r^2(\sin\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi \operatorname{ctg}\alpha) \tag{3}$$

Dakle, površina pravougaonika odredjena centralnim lukom φ je data sa (3). Koristeći diferencijalni račun sada ćemo utrvrditi maksimum funkcije $P(\varphi)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Vrijednost u kojoj se doseže maksimum će biti vrijednost centralnog ugla kome odgovara pravougaonik maksimalne površine.

Prvi izvod funkcije $P(\varphi)$, poslije nešto sredjivanja, se može zapisati u sljedećem oblinku (pokušajte sami!):

$$P'(\varphi) = r^2(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi \operatorname{ctg}\alpha)$$

S obzirom da nas zanima u kojoj tački iz intervala $(0,1)$ funkcija $P(\varphi)$ dostiže maksimum rješavamo jednačinu $P'(\varphi) = 0$. Očigledno jednačina je zadovoljena ako i samo ako važi:

$$\cos 2\varphi - \sin 2\varphi \operatorname{ctg} \alpha = 0.$$

Posljednju trigonometrijsku jednačinu rješavamo tako što obje strane date jednačine podijelimo sa $\sin 2\varphi$ dobijajući:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg} \alpha = 0$$

Primijetimo da je dijeljenje bilo moguće jer je $\sin 2\varphi > 0$ kada je $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Posljednju jednačinu rješavamo sljedećim jednostavnim nizom ekvivalencija:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 2\varphi &= \operatorname{ctg} \alpha \\ 2\varphi &= \alpha \\ \varphi &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Kako je drugi izvod funkcije $P(\varphi)$ dat sa:

$$P''(\varphi) = -2r^2(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi \cdot \operatorname{ctg} \alpha),$$

to je vrijednost drugog izvoda u tački $\varphi = \frac{\alpha}{2}$:

$$P''\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2r^2(\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha).$$

Drugi činilac u gornjem proizvodu je pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ pa je vrijednost drugog izvoda u posmatranoj tački negativna. Kako je $P'(\alpha/2) = 0$, a $P''(\alpha/2) < 0$ zaključujemo da funkcija $P(\varphi)$ dostiže maksimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Imajući u vidu razmatranja sa početka zadatka zaključujemo da je traženi pravougaonik onaj koji odgovara centralnom uglu $\frac{\alpha}{2}$.

2. Zadatak U dati pravi konus poluprečnika R i visine H upisati cilindar maksimalne zapremine.

Rješenje:

Jasno je da cilindar treba upisati kao što je prikazano na slici 2.

Slično kao u prethodnom zadatku, zapreminu upisanog cilindra ćemo predstaviti u funkciji jedne promjenljive. U ovom slučaju to će biti visina upisanog cilindra.

Uvedimo sljedeće oznake: sa h ćemo označavati visinu upisanog cilindra, sa r njegov poluprečnik, a sa $V(h)$ zapreminu upisanog cilindra visine h. Znamo da je zapremina proizvoljnog cilindra visine h i poluprečnika r data sa $V = r^2\pi h$. Dakle, da bismo našli izraz za funkciju $V(h)$ treba izraziti r preko h.

Primijetimo da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle EDC$ slični. Dakle, važi:

$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle EDC \\ OB : OC &= FD : FC \\ R : H &= r : (H - h) \\ r &= \frac{R(H-h)}{H} \end{aligned}$$

Koristeći gornji izraz za r i izraz za zapreminu cilindra ($V = r^2\pi h$) sada možemo napisati eksplicitni izraz za funkciju $V(h)$:

$$V(h) = \left(\frac{R(H-h)}{H}\right)^2 \pi h = \frac{R^2\pi}{H^2}(H^2 \cdot h - 2H \cdot h^2 + h^3)$$

Da bismo našli upisani cilindar maksimalne zapremine treba naći maksimum funkcije $V(h))$ na intervalu $(0, H)$. U tu svrhu, tražimo nule prvog izvoda funkcije $V(h)$:

$$\begin{aligned} V'(h) =& \frac{R^2\pi}{H^2}\left(H^2 - 4H \cdot h + 3h^2\right) \\ V'(h) = 0 \Leftrightarrow & H^2 - 4H \cdot h + 3h^2 = 0 \\ & h_{1,2} = \frac{4H \pm \sqrt{16H^2 - 12H^2}}{6} \\ & h_1 = \frac{H}{3} \quad h_2 = H \end{aligned}$$

S obzirom da maksimum tražimo na intervalu $(0, H)$ kandidat za maksimalnu vrijednost je $h = \frac{H}{3}$. Koristeći drugi izvod funkcije $V(h)$ provjeravamo da li se zaista radi o maksimumu:

$$\begin{aligned} V''(h) &= \cdots = \frac{R^2\pi}{H^2}(-4H + 6h) \\ V''(\frac{H}{3}) &= \cdots = -\frac{2R^2\pi}{H} \end{aligned}$$

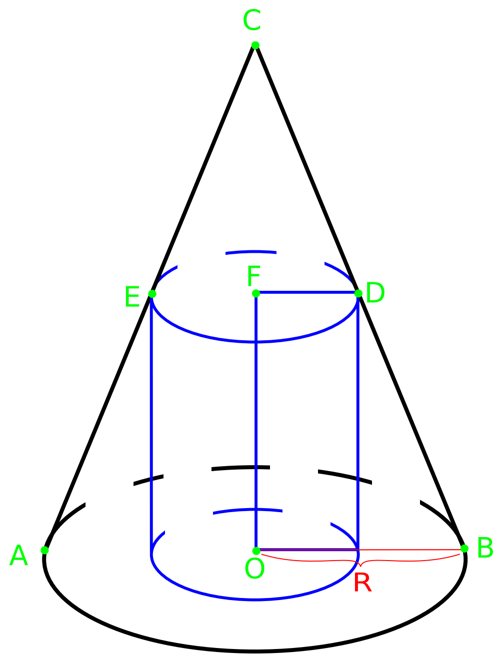

Figure 2: Slika uz zadatak 2.

Kako je vrijednost $V''(\frac{H}{3})$ očigledno negativna zaključujemo da funkcija $V(h)$ postiže maximum za $h = \frac{H}{3}$. Maksimalna zapremina upisanog cilindra iznosi:

$$V(\frac{H}{3}) = \cdots = \frac{4}{27}R^2\pi H$$